

## №6-дәріс

### Векторлардың векторлық көбейтіндісі, аралас көбейтіндісі және олардың геометрия мен механика салаларындағы қолданулары. Қасиеттері.

#### Векторлардың векторлық көбейтіндісі

**Анықтама 1.**  $\vec{a}$  векторының  $\vec{b}$  векторына векторлық көбейтіндісі деп төмендегі теңдіктерді қанағаттандыратын  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}; \vec{b}]$  векторын айтамыз:

1.  $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha$ ,  $\alpha = \left( \widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,
2.  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$
3.  $\vec{c}$  векторының бағыты  $\vec{c}$  векторының ұшынан қарағанда  $\vec{a}$  векторынан  $\vec{b}$  векторына дейінгі жақын ара қашықтық сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы болатындай  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  векторларынан құралған жазықтыққа қарай бағытталған.

#### Векторлық көбейтіндінің қасиеттері

1. Егер  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , онда  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .
2.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4.  $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$ .

Векторлық көбейтіндінің координаталық формадағы өрнектелуін табалық.  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  болсын. Онда

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ ,  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ ,  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$  екенін ескерсек:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

аламыз.

Е с к е р т у . Векторларды векторлық көбейтудің көмегімен мыналар анықталады:

1. Векторлардың коллинеарлығы

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \text{ немесе } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad (R_2 : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}) \quad (2)$$

2.  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  векторларынан құрылған параллелограммның ауданы

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| \quad (3)$$

*Мысал 1.*  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$  векторларынан құрылған параллелограммның ауданын тап. Мұндағы  $\mathbf{i} (1, 0)$ ,  $\mathbf{j}(0, 1)$ - бірлік векторлар және өзара перпендикуляр векторлар.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) * (\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} * \mathbf{i} + 3\mathbf{j} * \mathbf{i} - 8\mathbf{i} * \mathbf{j} - 12\mathbf{j} * \mathbf{j} = -3\mathbf{i} * \mathbf{j} - 8\mathbf{i} * \mathbf{j} = -11\mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{c};$$

$$\text{Спар.} = |\mathbf{c}| = 11|\mathbf{i} * \mathbf{j}| = 11 * 1 * 1 \sin \pi / 2 = 11.$$

*Мысал 2.*  $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$  және  $\mathbf{b} = (2, -1, 3)$  векторлары берілген. Осы векторлардың векторлық көбейтіндісі мен векторлық көбейтіндісінен пайда болған вектордың ұзындығын тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{k} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c}(3, 0, -2), |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} * \mathbf{b}| = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}.$$

### Векторлардың аралас көбейтіндісі

**Анықтама 2.**  $\bar{a}, \bar{b}$  және  $\bar{c}$  векторларының аралас көбейтіндісі деп  $\bar{a} \times \bar{b}$  және  $\bar{c}$  векторларының скаляр көбейтіндісіне тең санды айтамыз, ол координаталық формада былай жазылады:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$  болғандықтан, аралас көбейтіндіні былай белгілейміз:  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ .

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  векторларынан тұрғызылған параллелипедті қарастыралық. Онда  $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$ , ал  $h = n p_{\bar{a}} \bar{c}$ , мұндағы  $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ , және  $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| n p_{\bar{a}} \bar{c}$  болғандықтан  $V = |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}|$ .

**Е с к е р т у.** Аралас көбейтіндінің көмегімен мыналар анықталады:

1. Үш вектордың компланарлығы

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

2.  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  векторларынан тұрғызылған параллелипедтің көлемі

$$V = |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| \quad (5)$$

*Мысал 3.*  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  векторлары компланар екендігін көрсет.

Шешуі:

Егер  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  компланар болса, онда  $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = 0$ .

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 14 - 5 - 7 + 4 - 10 = 0.$$

Ендеше,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  векторлары компланар.

*Мысал* 4. Пирамиданың төбелері берілген:  
 $A(1, 2, 3)$ ,  $B(0, -1, 1)$ ,  $C(2, 5, 2)$ ,  $D(3, 0, -2)$ .

Табу керек:

1.  $VAC$  бұрышын.
2.  $ABC$  үшбұрышының ауданын.
3. Пирамида көлемін.

*Шешуі:*

$\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  векторларын табалық:

$$\overline{AB} = (0-1, -1-2, 1-3) = (-1, -3, -2), \quad \overline{AC} = (1, 3, -1), \quad \overline{AD} = (2, -2, -5)$$

$$1. \cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{-1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 9\vec{i} - 3\vec{j} = (9, -3, 0)$$

$$2. S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{81+9} = \frac{9\sqrt{10}}{2}.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 24.$$

$$3. V_{nup.} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$